ADVANCES IN MATHEMATICS 61, 165–183 (1986)

Le comportement à l'infini des fonctions de Bessel généralisées, I

DANIEL BARLET ET JEAN-LOUIS CLERC

U.E.R. Sciences Mathématiques, U.A. 750,
Université de Nancy I, 54506 Vandoeuvre-lés-Nancy, France

We give asymptotic expansions for zonal functions of the Cartan motion group; they generalize the classical expansion for Bessel functions.

INTRODUCTION

Soit G un groupe de Lie réel semi-simple de type non-compact, connexe et à centre fini. Soit $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, et soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ une décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$.

Soit K le sous-groupe compact (maximal) de G d'algèbre de $\mathfrak{k}$. Il opère par l'action adjointe sur $\mathfrak{p}$ en préservant le produit scalaire induit par la forme de Killing de $\mathfrak{g}$, notée $\langle\ ,\ \rangle$. Soit G_0 le produit semi-direct de K par $\mathfrak{p}$, appelé le groupe de déplacements de Cartan. L'espace homogène G_0/K, qui s'identifie naturellement à $\mathfrak{p}$ est un espace riemannien symétrique de type euclidien (cf. [7]).

Si Λ est un élément de $\mathfrak{p}$, on lui associe la fonction zonale J_Λ définie par

$$J_\Lambda(X) = \int_K e^{i\langle \Lambda, \operatorname{Ad} k X\rangle}\, dk, \qquad \text{pour} \quad X \in \mathfrak{p},$$

où dk désigne la mesure de Haar normalisée sur K. De plus, pour $\Lambda, \Lambda' \in \mathfrak{p}$, $J_\Lambda = J_{\Lambda'}$ si et seulement si Λ et Λ' sont conjugués par l'action de K, et on obtient ainsi toutes les fonctions zonales associées aux représentations unitaires irréductibles de G_0 qui sont de classe 1 par rapport à K.

On se propose de déterminer leur comportement asymptotique lorsque X tend vers l'infini. Les résultats ont été partiellement annoncés dans la note [2].

Contrairement aux fonctions zonales de l'espace homogène G/K qui sont les solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles linéaires ayant une singularité régulière à l'infini, pour G_0/K le système correspondant a une singulerité irrégulière à l'infini comme on peut s'en convaincre sur l'exemple $K = SO(n)$ et $\mathfrak{p} = \mathbb{R}^n$ qui correspond à $G = SO_0(n, 1)$ où les zonales se calculent simplement à partir des fonctions de Bessel.

0001-8708/86 $7.50

On ne peut donc pas espérer, dans cette situation, prouver l'existence du développement asymptotique par un théorème général comme cela a été fait pour G/K (voir par exemple [1, 10]) ni s'attendre à obtenir un développement asymptotique convergent.

Suivant une méthode classique pour établir le développement asymptotique des fonctions de Bessel, nous utiliserons la méthode de la phase stationnaire.

1. Notations et préliminaires

Soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{p}$; tout élément de $\mathfrak{p}$ est conjugué par $\mathrm{Ad}(K)$ d'un élément de $\mathfrak{a}$. Dans la suite, on identifie $\mathfrak{p}$ et son dual, et de même $\mathfrak{a}$ et son dual grâce à la structure euclidienne sur $\mathfrak{p}$ donnée par la restriction de la forme de Killing. Comme K agit isométriquement sur $\mathfrak{p}$, et que la mesure dk est invariante à droite et à gauche, l'étude des fonctions J_Λ se ramène au cas où $\Lambda \in \mathfrak{a}$, et il suffit d'étudier la restriction de J_Λ à $\mathfrak{a}$.

Soit M le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans K, et $\mathfrak{m}$ son algèbre de Lie. On note par τ l'action à gauche de K sur K/M donnée par $\tau(k) \cdot k_1 M = kk_1 M$.

Soit $\mathfrak{l}$ l'orthogonal pour la forme de Killing de $\mathfrak{m}$ dans $\mathfrak{k}$. L'espace tangent à K/M au point $\dot{e} = eM$ s'identifie à $\mathfrak{l}$ par l'isomorphisme:

$$\mathfrak{l} \ni L \to \tilde{L}_{\dot{e}} f = \frac{d}{dt} f(\tau(\exp tL) \cdot \dot{e})|_{t=0}.$$

Si maintenant on se place en un point quelconque $\dot{k}$ de K/M, on choisit $k \in K$, tel que $\tau(k) \cdot \dot{e} = \dot{k}$; comme $\tau(k)$ est un difféomorphisme de K/M, cela permet d'identifier l'espace tangent à K/M en $\dot{k}$ avec $\mathfrak{l}$ via l'application tangente à $\tau(k)$ au point $\dot{e}$. Explicitement

$$D\tau(k)_{\dot{e}}\,(L) f = \frac{d}{dt} f(\tau(k \exp tL) \cdot \dot{e})|_{t=0}.$$

L'opposé de la restriction de la forme de Killing à $\mathfrak{l}$ définit un produit scalaire sur $\mathfrak{l}$, invariant par M. Il en résulte qu'il existe une unique métrique riemannienne sur K/M, invariante par K et coïncidant en chaque point avec l'image par $\tau(k)$ de ce produit scalaire défini sur $\mathfrak{l}$. En particulier, on note dk_M la mesure riemannienne associée, et $\mathrm{vol}(K/M)$ sa masse totale.

Avec ces notations, on a pour $\Lambda \in \mathfrak{a}$

$$J_\Lambda(X) = \mathrm{vol}(K/M)^{-1} \int_{K/M} e^{i\langle \Lambda, \mathrm{Ad}\,k \cdot X\rangle}\, dk_M.$$

Soit $\mathfrak{h}_{\mathbf{C}}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ contenant $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}$; elle est stable par θ, l'involution de Cartan associée à la décomposition $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$. Soit Δ l'ensemble des racines de la paire $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbf{C}})$; on sait que les racines sont réelles sur

$$\mathfrak{h}_* = \mathfrak{a} + i(\mathfrak{h}_{\mathbf{C}} \cap k).$$

Choisissons une chambre de Weyl dans $\mathfrak{h}_*$ et notons par Δ^+ l'ensemble des racines positives sur cette chambre. Notons par Δ_0 l'ensemble des éléments de Δ qui sont identiquement nuls sur $\mathfrak{a}$, et par Δ_+ le complémentaire de $\Delta_0 \cap \Delta^+$ dans Δ^+.

Soit enfin Σ_+ l'ensemble des racines positives de la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ relativement à l'ordre sur le dual de $\mathfrak{a}$ induit par l'ordre choisi sur le dual de $\mathfrak{h}_*$; alors Σ_+ est formé des restrictions à $\mathfrak{a}$ des éléments de Δ_+.

Si $\alpha \in \Delta$ définissons α^θ par $\alpha^\theta(H) = \alpha(\theta(H))$ pour $h \in \mathfrak{h}_{\mathbf{C}}$; il est immédiat que α^θ est encore dans Δ, puisque θ est un automorphisme de $\mathfrak{g}$. De plus $(\alpha^\theta)^\theta = \alpha$ puisque θ est involutif. Une racine α est dans Δ_0 si et seulement si $\alpha^\theta = \alpha$. Si α est une racine quelconque, $\alpha^\theta + \alpha$ s'annule sur $\mathfrak{a}$; donc si $\alpha \in \Delta_+$, α^θ est une racine négative; nous poserons $\alpha' = -\alpha^\theta$ pour $\alpha \in \Delta_+$. Il est clair que $\alpha \to \alpha'$ est une involution de Δ_+, et que les restrictions à $\mathfrak{a}$ de α et α' coïncident.

Numérotons les éléments de Δ_+ de manière à avoir:

$$\alpha_i' = \alpha_i \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant m_1$$

et

$$\alpha'_{m_1+2j-1} = \alpha_{m_1+2j} \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant m_2 \ (\text{donc } \#(\Delta_+) = m_1 + 2m_2 = n).$$

Pour chaque $\alpha \in \Delta$ notons par $\mathfrak{g}_\alpha$ le sous-espace radiciel associé. Choisissons $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ non nul pour chaque $\alpha \in \Delta$. Une base de $\mathfrak{l}_{\mathbf{C}}$ est alors formée des vecteurs $X_\alpha + \theta X_\alpha$ pour $\alpha \in \Delta_+$ (voir [7]).

De plus, on a

$$\langle X_\alpha + \theta X_\alpha, X_\beta + \theta X_\beta \rangle = 0 \qquad \text{si} \quad \alpha \neq \beta'$$

comme on le voit aisément en utilisant l'orthogonalité de $\mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{g}_\beta$ pour $\alpha + \beta \neq 0$.

Enfin $\langle X_\alpha + \theta X_\alpha, X_{\alpha'} + \theta X_{\alpha'} \rangle \neq 0$ puisque la forme de Killing est non-dégénérée sur $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$; grâce à un choix convenable des X_α on peut toujours supposer que l'on a

$$\langle X_\alpha + \theta X_\alpha, X_{\alpha'} + \theta X_{\alpha'} \rangle = 1 \qquad \text{pour} \quad \alpha \in \Delta_+.$$

Désignons par $\mathfrak{q}$ l'orthogonal de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{p}$; une base de $\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}$ est donnée par les vecteurs $X_\alpha - \theta X_\alpha$, $\alpha \in \Delta_+$ (cf. [7]). Notons de plus que

$$\langle X_\alpha - \theta X_\alpha, X_\beta - \theta X_\beta \rangle = 0 \qquad \text{si} \quad \beta \neq \alpha',$$

et

$$\langle X_\alpha - \theta X_\alpha, X_{\alpha'} - \theta X_{\alpha'} \rangle = -1,$$

par calcul élémentaire.

2. Étude des points critiques de la fonction de phase

Considérons maintenant X et Λ dans $\mathfrak{a}$ fixés. Pour $t \in \mathbb{R}^+$ posons:

$$I(t) = \int_{K/M} e^{it\langle \Lambda, \mathrm{Ad}(k)\cdot X\rangle}\, dk_M.$$

Nous allons étudier le comportement de $I(t)$ quand $t \to \infty$ au moyen de la méthode de la phase stationnaire. Soit $\varphi: K/M \to \mathbb{R}$ la "fonction de phase" qui est donnée par $\varphi(k) = \langle \Lambda, \mathrm{Ad}(k)\cdot X\rangle$. C'est une fonction C^∞ à valeurs réelles sur K/M dont nous allons déterminer les points critiques. Si $L \in \mathfrak{l}$, on a:

$$\begin{aligned}
\varphi(k\cdot \exp(sL)\cdot \dot{e}) &= \langle \Lambda, \mathrm{Ad}(k)\cdot \mathrm{Ad}(\exp(sL))\cdot X\rangle \\
&= \langle \mathrm{Ad}(k^{-1})\cdot \Lambda, \exp(s\,\mathrm{ad}(L))\cdot X\rangle \\
&= \langle \mathrm{Ad}(k^{-1})\cdot \Lambda, X + s\cdot [L, X] + \frac{s^2}{2}\cdot [L, [L, X] + O(s^3)\rangle.
\end{aligned}$$

Donc $k \in K/M$ est un point critique de φ si et seulement si la forme linéaire $L \to \langle \mathrm{Ad}(k^{-1})\cdot \Lambda, [L, X]\rangle$ est identiquement nulle sur $\mathfrak{l}$.

(2.1) Lemme. *Soit X un élément régulier de* $\mathfrak{a}$; *alors* $[\mathfrak{l}, X] = \mathfrak{q}$ *où* $\mathfrak{q}$ *est l'orthogonal de* $\mathfrak{a}$ *dans* $\mathfrak{p}$.

Démonstration. Soit $Z \in \mathfrak{k}$ et $T \in \mathfrak{a}$. Alors on a

$$\langle [Z, X], T\rangle = \langle Z, [X, T]\rangle = 0$$

puisque $\mathfrak{a}$ est abélien; on a donc $[\mathfrak{k}, X] \subset \mathfrak{q}$.

Soit $\alpha \in \Delta_+$; on a $[X_\alpha + \theta X_\alpha, X] = -\alpha(X)(X_\alpha - \theta X_\alpha)$ puisque $\theta X_\alpha \in \mathfrak{g}_{\alpha'}$ et que $\alpha = \alpha'$ sur $\mathfrak{a}$. Comme X est régulier, $\alpha(X)$ n'est pas nul, et donc $X_\alpha - \theta X_\alpha$ est dans $[\mathfrak{l}, X]$ pour tout $\alpha \in \Delta_+$. On a donc $\mathfrak{q} \subset [\mathfrak{l}, X]$, ce qui prouve le lemme (2.1).

Supposons maintenant X régulier; d'après le lemme 1 une condition nécessaire et suffisante pour que k soit point critique de φ est que $\mathrm{Ad}(k^{-1}) \cdot \Lambda$ soit orthogonal à $\mathfrak{q}$, ce qui équivaut à

$$\mathrm{Ad}(k^{-1}) \cdot \Lambda \in \mathfrak{a}.$$

Si Λ est aussi régulier dans $\mathfrak{a}$, cette condition équivaut au fait que $\mathrm{Ad}(k^{-1})$ normalise $\mathfrak{a}$. Notons par M' le normalisateur de $\mathfrak{a}$ dans K. Les points critiques de φ sont donc les points de M'/M, c'est-à-dire les éléments du groupe de Weyl W de la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$.

Nous supposerons désormais X et Λ réguliers dans $\mathfrak{a}$, et nous allons montrer que les points critiques de φ sont alors non-dégénérés.

Soit donc $w \in W$; la différentielle seconde de φ en w est donnée par:

$$Q(L) = \frac{d^2}{ds^2} \langle w^{-1}\Lambda, \exp(s \,\mathrm{ad}(L)) \cdot X \rangle_{s=0}$$

ce qui donne

$$Q(L) = \langle w^{-1}\Lambda, [L, [L, X]] \rangle \qquad \text{pour} \quad L \in \mathfrak{l}.$$

Comme $[L_1, [L_2, X]] + [X, [L_1, L_2]] + [L_2, [X, L_1]] = 0$, et que $[X, [L_1, L_2]] \in \mathfrak{q}$, on a:

$$\langle w^{-1}\Lambda, [L_1, [L_2, X]] \rangle = \langle w^{-1}\Lambda, [L_2, [L_1, X]] \rangle$$

ce qui montre que la forme bilinéaire symétrique associée à Q (que l'on notera encore Q) est donnée par:

$$Q(L_1, L_2) = \langle w^{-1}\Lambda, [L_1, [L_2, X]] \rangle = -\langle [w^{-1}\Lambda, L_1], [X, L_2] \rangle.$$

Étendons Q en une forme $\mathbb{C}$-bilinéaire sur $\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}$ et calculons sa matrice dans la base forme des $\{X_\alpha + \theta X_\alpha\}_{\alpha \in \Delta_+}$. On a

$$Q(X_\alpha + \theta X_\alpha, X_\beta + \theta X_\beta) = -\alpha(w^{-1}\Lambda)\, \beta(X) \langle X_\alpha - \theta X_\alpha, X_\beta - \theta X_\beta \rangle,$$

ce qui donne 0 si $\alpha' \neq \beta$ et $\alpha(w^{-1}\Lambda)\, \alpha(X)$ si $\alpha' = \beta$, d'après le choix des X_α.

(2.2) Proposition. *Soient X et Λ deux éléments réguliers de $\mathfrak{a}$. Les points critiques de la fonction $\varphi: K/M \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(k) = \langle \Lambda, \mathrm{Ad}(k) \cdot X \rangle$ sont les points de $W = M'/M$; ils sont non-dégénérés.*

Démonstration. La matrice de la différentielle seconde de φ au point w dans la base $\{X_\alpha + \theta X_\alpha\}_{\alpha \in \Delta_+}$ (modulo l'identification précisée plus haut entre $\mathfrak{l}$ et l'espace tangent en w à K/M) est calculée ci-dessus, et son déterminant vaut au signe près

$$\prod_{\alpha \in \Delta_+} \alpha(w^{-1}\Lambda)\, \alpha(X),$$

ce qui prouve la proposition.

Déterminons la signature de cette forme quadratique. Pour ceci considérons l'endomorphisme de $\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}$ défini par $-\langle A(X), Y\rangle = Q(X, Y)$ pour tout $X, Y \in \mathfrak{l}_{\mathbb{C}}$. Comme la forme de Killing est définie négative sur $\mathfrak{l}$, la signature de Q n'est autre que la différence entre le nombre de valeurs propres positives de A et le nombre de valeurs propres négatives de A. Mais la matrice de A dans la base $\{X_\alpha + \theta X_\alpha\}_{\alpha \in \Delta_+}$ est clairement diagonale, avec

$$-\alpha(w^{-1}\Lambda)\, \alpha(X) \qquad \text{pour} \quad \alpha \in \Delta_+$$

sur la diagonale. Si $\tilde{\alpha}$ désigne la restriction de α à $\mathfrak{a}$, et si $w\tilde{\alpha}$ désigne l'élément de Σ défini par $w\tilde{\alpha}(H) = \tilde{\alpha}(w^{-1}H)$, les valeurs propres de A sont donc les $-w\tilde{\alpha}(\Lambda) \cdot \tilde{\alpha}(X)$, pour $\alpha \in \Delta_+$.

Pour préciser les signes, notons que par conjugaison par le groupe de Weyl, on peut toujours supposer que Λ et X appartiennent à $\mathfrak{a}^+$. Il en résulte que

$$\operatorname{sgn}(Q) = \gamma(w) = \#\{\alpha \in \Delta_+ \mid w\tilde{\alpha} < 0\} - \#\{\alpha \in \Delta_+ \mid w\tilde{\alpha} > 0\}.$$

3. La méthode de la phase stationnaire

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension n, muni d'un produit scalaire euclidien, noté (,).

Soit q une forme quadratique non-dégénérée sur E, et Q la forme bilinéaire associée. Soit A l'isomorphisme de E défini par

$$\forall x, y \in E, \qquad Q(x, y) = (Ax, y).$$

Par définition le déterminant de la forme quadratique q est le déterminant de A, et on le note $\text{dét}(q)$.

On note $\hat{Q}$ la forme bilinéaire symétrique définie par

$$\forall x, y \in E, \qquad \hat{Q}(x, y) = (A^{-1}x, y),$$

et $\hat{q}$ la forme quadratique, non-dégénérée sur E associée à $\hat{Q}$. On note enfin $\hat{\mathfrak{Q}}$ l'opérateur différentiel à coefficients constants sur E, naturellement associé à $\hat{q}$, via l'identification entre E et E^* à l'aide du produit scalaire (,).

Avec ces notations, le théorème de la phase stationnaire s'énonce ainsi (cf. [4, 3]).

(3.1) THÉORÈME. *Soit f une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs réelles, et g une fonction de classe C^∞ à valeurs complexes, à support compact. On suppose que f possède un seul point critique x^0 dans le support de g, et que x^0 est non-dégénéré. On pose $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire standard et $q = d^2f(x^0)$. On note* $\operatorname{sgn}(q)$ *la signature de q, $\det(q)$ le déterminant de q, et $\hat{\mathfrak{Q}}$ l'opérateur différentiel associé comme ci-dessus. Soit enfin h la fonction définie par*

$$h(x) = g(x) - g(x^0) - \tfrac{1}{2}q(x - x^0).$$

Alors, posant

$$I(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{itf(x)}\, g(x)\, dx,$$

on a, pour $t \to +\infty$

$$I(t) \sim \frac{(2\pi)^{n/2}}{t^{n/2}} \,|\text{dét}\, q|^{-1/2}\, e^{(i\pi/4)\operatorname{sgn}(q)} e^{itf(x^0)}$$

$$\times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{-j}}{j!} \hat{\mathfrak{Q}}^j(g(x) \exp ith(x))|_{x = x^0}.$$

La signification précise du développement est la suivante: l'expression $\hat{\mathfrak{Q}}^j(g(x) \exp ith(x))|_{x=x^0}$ est un polynôme en t, de degré $\leqslant [2j/3]$. En regroupant dans le membre de droite les termes (en nombre fini) en t^{-k}, pour chaque k, on obtient un développement asymptotique suivant les puissances négatives de t. Autrement dit, la différence entre $I(t)$ et la somme partielle d'ordre k du développpment est en $O(t^{-\alpha_k})$, avec

$$\alpha_k = \frac{n}{2} + k - \left[\frac{2k}{3}\right].$$

Ajoutons que si f et toutes ses dérivées dépendent continûment d'un paramètre ω, l'estimation du reste est, pour chaque k, localement uniforme en ω (cf. [4, p. 76 sqq]).

Soient X et Λ deux éléments réguliers de a. La fonction de phase $\varphi(\dot{k}) = \langle \Lambda, \operatorname{Ad} \dot{k} \cdot X \rangle$ admet pour seuls points critiques les points $w \in M'/M$. Soit, pour chaque $w \in M'/M$, χ_w une fonction C^∞ sur K/M, égale à 1 en voisinage de w, à support suffisamment petit, pour que la carte:

$$L \mapsto w \exp L \cdot \dot{e}, \qquad \mathfrak{l} \to K/M$$

y soit un difféomorphisme (w désigne ici un représentant quelconque, mais fixé de la classe modulo M). On suppose de plus que les supports des fonctions χ_w sont disjoints. On pose

$$I_w(t)=\int_{K/M} e^{it\varphi(k)}\chi_w(k)\,dk_M.$$

(3.2) LEMME. *La différence* $J_\Lambda(tX)-\sum_{w\in W}\operatorname{vol}(K/M)^{-1}I_w(t)$ *est à décroissance rapide, localement uniformément par rapport à* X *et* Λ.

En chaque point du support de $1-\sum_{w\in W}\chi_w(k)$, la différence de la fonction de phase ne s'annule pas. De sorte que (3.2) est conséquence du résultat suivant.

(3.3) PROPOSITION. *Soit* V *une variété différentiable munie d'une mesure* dv *densité* C^∞ *et* X *une variété compacte.*

Soit $f\colon V\times X\to\mathbb{R}$ *une fonction* C^∞, *et* $g\colon V\times X\to\mathbb{C}$ *une fonction* C^∞ *à support compact. On suppose que* $d_v f$ *est toujours différente de* 0 *sur le rapport de* g. *Alors la fonction sur* $X\times\mathbb{R}$, *définie par* $I(x,t)=\int_V e^{itf(v,x)}g(v,x)\,dv$ *est à décroissance rapide en* t, *uniformément par rapport à* $x\in X$.

De manière précise, $\forall N\geqslant 0$, $\exists C_N$, telle que

$$|I(x,t)|\leqslant C_N(1+t)^{-N},\qquad \forall x\in X,\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

Pour chaque (v,x) dans le support de g, il existe des voisinages A_v et B_x de v et x dans V et X, et une carte

$$\psi_v\colon A_v\to\mathbb{R}^n\qquad (n=\dim V),$$

telle que la fonction $f(\psi_v^{-1}(w),x)$ coïncide sur $\psi_v(A_v)$ avec la première coordonnée de $\mathbb{R}^n$, d'après le théorème des fonctions implicites avec paramètres. Extrayons un sous-recouvrement fini du recouvrement du support de g formé des $A_v\times B_x$, soit $(A_{v_j}\times B_{x_j})_{j\in J}$, et soit φ_j une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement.

Alors

$$I(x,t)=\sum_{j\in J}\int_V e^{itf(v,x)}\varphi_j(v,x)\,g(v,x)\,dv.$$

Pour prouver le lemme, il suffit de montrer, pour chaque $j\in J$, que

$$I_j(x,t)=\int_V e^{itf(v,x)}\varphi_j(v,x)\,g(v,x)\,dv$$

est à décroissance rapide quand $t \to +\infty$. Mais par changement de variable, on a

$$I_j(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{itw_1} \gamma(w_1, w_2, ..., w_n, x) \, dw_1 \cdots dw_n,$$

où γ est une fonction C^∞ en w, et continue ainsi que toutes ses dérivées par rapport au couple (w, x). Les estimations désirées s'obtiennent alors par N intégrations par parties par rapport à w_1.

Nous allons maintenant préciser le développment asymptotique de chacune des intégrales $I_w(t)$. Supposons d'abord $w = \dot{e}$, et choisissons e comme représentant de cette classe modulo M.

Soit $\exp\colon \mathfrak{l} \to K/M$ la carte $L \mapsto \tau(\exp L)\, e$; par changement de variable, il vient

$$I_{\dot{e}}(t) = I(t) = \int_{\mathfrak{l}} e^{it\langle \Lambda, \mathrm{Ad}(\exp L)\cdot X\rangle} g(L) \, dL,$$

où g est C^∞ à support compact, et indépendante de X et Λ (en fait g est égale au voisinage de 0 au jacobien de la carte; en particulier $g(0) = 1$).

Posant $f(L) = \langle \Lambda, \mathrm{Ad}(\exp L)\cdot X\rangle$, on voit que f et g satisfont aux conditions du théorème (3.1).

Pour chaque $L \in \mathfrak{l}$, notons $\tilde{L}$ le champ de vecteur défini par

$$\tilde{L}f(k) = \frac{d}{ds} f(\tau(\exp sL)\, k)|_{s=0}.$$

Comme f est analytique, et que g est analytique au voisinage de 0, on peut étendre ces fonctions à un voisinage de 0 dans $\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}$, et utiliser pour les calculs la base de $\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}$ formée des $\{X_\alpha + \theta X_\alpha\}_{\alpha \in \Delta_+}$.

Rappelons que le produit scalaire sur $\mathfrak{l}$ est l'opposé de la forme de Killing; l'opérateur A associé à $q = d^2 f(0)$ est donc défini par $-\langle AX, Y\rangle = Q(X, Y)$. D'après les calculs du paragraphe 2, on voit que la matrice de A dans la base $\{X_\alpha + \theta X_\alpha\}_{\alpha \in \Delta_+}$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} -\alpha_1(X)\,\alpha_1(\Lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & -\alpha_n(X)\,\alpha_n(\Lambda) \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$|\det q| = \left| \prod_{\alpha \in \Delta_+} \alpha(X) \prod_{\alpha \in \Delta_+} \alpha(\Lambda) \right|.$$

Notons $(s_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ les coordonnées associées à la base choisie. L'opérateur différentiel $\hat{Q}$ s'écrit alors

$$\hat{Q}=\sum_{\alpha\in\Delta_+}\frac{1}{\alpha(X)\,\alpha(\Lambda)}\frac{\partial^2}{\partial s_\alpha\,\partial s_{\alpha'}},\qquad \text{avec}\quad s_{\alpha_i}=s_i,\ 1\leqslant i\leqslant n.$$

Soit $J=(j_1,\ldots,j_n)$ un multi-indice, et notons $\partial^{|J|}/\partial s^J$ l'opérateur différentiel

$$\frac{\partial^{j_1}}{\partial s_1^{j_1}}\cdots\frac{\partial^{j_n}}{\partial s_n^{j_n}}.$$

Notons $\tilde{X}^J$ l'opérateur différentiel égal au coefficient de $s^J=s_1^{j_1}\cdots s_n^{j_n}$ dans l'expression

$$(s_1(\widetilde{X_{\alpha_1}+\theta X_{\alpha_1}})+\cdots+s_n(\widetilde{X_{\alpha_n}+\theta X_{\alpha_n}}))^{|J|}.$$

Une conséquence de la formule de Taylor (cf. [7, p. 392]) donne

$$\left.\frac{\partial^{|J|}}{\partial s^J}f\right|_{s=0}=\frac{1}{|J|!}\tilde{X}^J\varphi(\dot{e}).\tag{3.4}$$

(3.5) Lemme. *Soient* $Y_1=X_{\alpha_{i_1}}+\theta X_{\alpha_{i_1}},\ldots,Y_j=X_{\alpha_{i_j}}+\theta X_{\alpha_{i_j}}$, $j>2$. *Alors* $\tilde{Y}_1\cdots\tilde{Y}_j\varphi(\dot{e})=c_{i_1\cdots i_j}\alpha_{i_1}(\Lambda)\,\alpha_{i_j}(X)$, *où* $c_{i_1\cdots i_j}$ *est une constante bien déterminée, ne dépendant que des* Y_i, $1\leqslant i\leqslant j$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
&\tilde{Y}_1\cdots\tilde{Y}_j\varphi(\dot{e})\\
&=\frac{\partial}{\partial s_1}\cdots\frac{\partial}{\partial s_j}\varphi(\tau(\exp s_jY_j)\cdots\tau(\exp s_1Y_1)\,\dot{e})|_{s=0}\\
&=\frac{\partial}{\partial s_1}\cdots\frac{\partial}{\partial s_j}\langle\Lambda,(\mathrm{Ad}\exp s_jY_j\circ\cdots\circ\mathrm{Ad}\exp s_1Y_1)\,X\rangle|_{s=0}\\
&=\langle\Lambda,[Y_j[\cdots[Y_1X]\cdots]\rangle\\
&=-\alpha_{i_j}(\Lambda)\,\alpha_{i_1}(X)\cdot\langle X_{\alpha_{i_j}}-\theta X_{\alpha_{i_j}},[Y_{j-1}\cdots[Y_1X_{\alpha_{i_1}}-\theta X_{\alpha_{i_1}}]\cdots]\rangle\\
&=c_{i_1\cdots i_j}\alpha_{i_j}(\Lambda)\,\alpha_{i_1}(X).
\end{aligned}$$

Si $J=(j_1,\ldots,j_n)$ est un multi-indice, on note α^J le monôme $\alpha^J(X)=\alpha_1(X)^{j_1}\cdots\alpha_n(X)^{j_n}$. Les multi-indices sont munis d'un ordre partiel: $J\prec K$ si $j_i\leqslant k_i$, pour tout i, $1\leqslant i\leqslant n$.

Enfin le multi-indice $J+K$ est défini comme étant $(j_1+k_1,\ldots,j_n+k_n)$.

(3.6) PROPOSITION. *Soit J un multi-indice; alors $(\partial^{|J|}/\partial s^J)(g e^{ith})|_{s=0}$ est un polynôme en t, de degré inférieur ou égal à $|J|/3$, dont le coefficient du terme de degré k est de la forme:*

$$\sum_{\substack{K \prec J \\ |K|=k}} \sum_{\substack{L \prec J \\ |L|=k}} a_{K,L} \alpha^K(X)\, \alpha^L(\Lambda),$$

avec $a_{K,L} \in \mathbb{C}$ indépendants de t, X et Λ.

On remarque d'abord que les dérivées d'ordre inférieur ou égal à 2 de h sont nulles en 0,[1] et que les dérivées d'ordre supérieur ou égal à 3 sont les mêmes que celles de f.

Par application de la formule de Leibnitz, on voit ensuite que la dérivée à calculer est effectivement un polynôme en t de degré inférieur ou égal à $[|J|/3]$. Se rappelant que g ne dépend ni de t, ni de X, ni de Λ, on voit aussi que le coefficient de t^k dans ce polynôme est une combinaison linéaire de termes de la forme

$$\left(\frac{\partial^{|J_1|}}{\partial s^{J_1}} h\right) \cdots \left(\frac{\partial^{|J_k|}}{\partial s^{J_k}} h\right)\Bigg|_{s=0},$$

avec $|J_1| \geqslant 3, ..., |J_k| \geqslant 3$, et $J_1 + \cdots + J_k \prec J$.

Pour calculer $((\partial^{|J_1|}/\partial s^{J_1})\, h)_{s=0}, ..., ((\partial^{|J_k|}/\partial s^{J_k})\, h)_{s=0}$, on utilise la formule (3.4), et le lemme (3.5).

Une telle dérivée est combinaison linéaire de termes de la forme

$$\prod_{1=1}^{k} (\alpha_{j_1^1}(\Lambda)\, \alpha_{j_1^2}(X)) \cdots (\alpha_{j_k^1}(\Lambda)\, \alpha_{j_k^2}(X)),$$

où

$$(0, ..., 0, \underset{j_l^1}{1}, 0, ..., 0, \underset{j_l^2}{1}, 0, ..., 0) \prec J_l, \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant l \leqslant k.$$

Un tel terme se réécrit

$$\alpha^K(X)\, \alpha^L(\Lambda), \qquad \text{où} \quad K \prec J_1 + \cdots + J_k \prec J,$$

et de même pour L. Ceci complète la démonstration de la proposition (3.6).

[1] On utilise les notations du théorème (3.1).

(3.7) COROLLAIRE. $\hat{\mathfrak{Q}}^j(ge^{ith})|_{s=0}$ *est un polynôme en t, de degré inférieur ou égal à* $[2j/3]$, *dont le coefficient du terme de degré k est de la forme*:

$$\sum_{|K|=j-k} \sum_{|L|=j-k} c_{K,L} \frac{1}{\alpha^K(X)} \frac{1}{\alpha^L(\Lambda)}.$$

Ceci est en effet conséquence de l'expression de l'opérateur $\hat{\mathfrak{Q}}$ dans les coordonnées (s_α) et de la proposition (3.6).

(3.8) PROPOSITION. *Il existe des constantes* $\Gamma_{J,K} \in \mathbb{C}$, *avec* $\Gamma_{0,0} = 1$, *telles que*

$$I(t) \sim \frac{(2\pi)^{n/2}}{t^{n/2}} e^{it\langle\Lambda, X\rangle} e^{(i\pi/4)\operatorname{sgn}(q)} \left| \prod_{\alpha \in \Delta_+} \alpha(X)\,\alpha(\Lambda) \right|^{-1/2}$$

$$\times \sum_{j=0}^{\infty} t^{-j} \sum_{|J|=j} \sum_{|K|=j} \frac{\Gamma_{J,K}}{\alpha^J(X)\,\alpha^K(\Lambda)}$$

le développement asymptotique étant valable uniformément lorsque X et Λ varient dans un compact des points réguliers de $\mathfrak{a}$.

C'est une conséquence du théorème (3.1) et des calculs antérieurs, notamment le corollaire (3.7).

Soit maintenant w quelconque, et choisissons un représentant de la classe modulo M, noté encore w.

On a

$$I_w(t) = \int_{K/M} e^{it\varphi(k)} \chi_w(k)\, dk_M.$$

Faisons le changement de variable $l = \tau(w^{-1})\,k$. Alors

$$I_w(t) = \int_{K/M} e^{it\varphi(\tau(w)l)} \chi_w(\tau(w)\,l)\, dl_M.$$

Mais $\varphi(\tau(w)\,l) = \langle \Lambda, \mathrm{Ad}(\tau(w)\,l)\,X\rangle = \langle w^{-1}\Lambda, \mathrm{Ad}\, l \cdot X\rangle$, et $l \to \chi_w(\tau(w)\,l)$ est une fonction C^∞ à support dans un petit voisinage de e, et égale à 1 au voisinage de e. Il en résulte que $I_w(t)$ a pour développement asymptotique celui qu'on obtient en changeant Λ en $w^{-1}\Lambda$ dans celui de $I(t)$. Supposons désormais que X et Λ sont dans la chambre de Weyl dominante $\mathfrak{a}^+$.

(3.9) THÉORÈME. *On a le développement asymptotique*

$$J_\Lambda(X) \sim \frac{(2\pi)^{n/2}}{\operatorname{vol}(K/M)} \sum_{w \in W} e^{(i\pi/4)\gamma(w)} e^{i\langle\Lambda, wX\rangle} \left| \prod_{\alpha \in \Delta_+} \alpha(X)\,\alpha(\Lambda) \right|^{-1/2}$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|J|=k} \sum_{|K|=k} \frac{\Gamma_{J,K}}{\alpha^J(w^{-1}\Lambda)\,\alpha^K(X)},$$

au sens suivant: la différence entre $J_\Lambda(X)$ et la contribution des termes du développement d'indice $\leqslant k$ fixé est un $O(\|X\|^{-k-n/2-1})$, uniformément pour X dans un cône à base compacte strictement contenu dans $\mathfrak{a}^+$, et Λ dans un compact de $\mathfrak{a}^+$; les $\Gamma_{J,K}$ étant des constantes complexes, avec $\Gamma_{0,0}=1$.

Remarque 1. Comme l'a observé Helgason dans [8], les fonctions $1/\alpha^K$ ne sont pas linéairement indépendantes, en dehors bien entendu du cas de rang un. Cela implique que la détermination des constantes $\Gamma_{J,K}$ par un procédé de récurrence analogue à celui du cas non-compact semble délicate.

Remarque 2. Dans le cas où $\mathfrak{g}$ possède une structure complexe J, on connaît une expression explicite des fonctions zonales; si $\mathfrak{u}$ est une forme réelle compacte de $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{g}=\mathfrak{u}+J\mathfrak{u}$ est une décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$. Désignons par U le groupe adjoint de $\mathfrak{u}$, et par T un tore maximal de U, d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$. Alors $J\mathfrak{t}$ est un sous-espace abélien maximal de $J\mathfrak{u}$, et $\mathfrak{h}=\mathfrak{t}+J\mathfrak{t}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Si P désigne le système de racines de la paire complexe $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, qui s'identifie au système de racines de $(\mathfrak{u}, \mathfrak{t})$, alors chaque racine β restreinte à $J\mathfrak{t}$ est de multiplicité deux. Soit π le produit des racines positives de la paire complexe $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, et ρ la demi-somme des racines positives. On a alors (cf. [5, théorème 2; 10, p. 204]), pour X, $X'\in\mathfrak{h}$

$$\begin{aligned}\pi(X)\,\pi(X')&\int_U e^{\langle X',\operatorname{Ad}uX\rangle}\,du\\&=\prod_{\beta\in P^+}\langle\beta,\rho\rangle\sum_{w\in W}\varepsilon(w)\,e^{\langle X',wX\rangle}.\end{aligned}$$

On en déduit pour $X\in J\mathfrak{t}$ et $\Lambda\in J\mathfrak{t}$, X et Λ réguliers la formule

$$J_\Lambda(X)=\frac{(-i)^m}{\prod_{\alpha\in P^+}\alpha(X)\prod_{\alpha\in P^+}\alpha(\Lambda)}\prod_{\beta\in P^+}\langle\beta,\rho\rangle\cdot\sum_{w\in W}\varepsilon(w)\,e^{i\langle\Lambda,wX\rangle}$$

avec $m=\#(P^+)=n/2$.

Pour comparer avec le premier terme du développement asymptotique, on note que

$$\begin{aligned}\gamma(w)&=2(\#\{\beta\in P_+,\ w\alpha<0\}-\#\{\beta\in P_+,\ w\alpha>0\})\\&=4\#\{\beta\in P_+,\ w\alpha<0\}-2\#(P_+).\end{aligned}$$

D'où

$$e^{(i\pi/4)\gamma(w)}=(-1)^{\#\{\beta\in P_+\mid w\beta<0\}}(-i)^m,$$

et d'apr̀s un résultat classique

$$(-1)^{\#\{\beta \in P_+ \mid w\beta < 0\}}$$

n'est autre que la signature $\varepsilon(w)$.

Finalement, on obtient comme sous-produit de l'identification la formule

$$\operatorname{vol}(U/T) = (2\pi)^{n/2} \left(\prod_{\beta \in P^+} \langle \beta, \rho \rangle \right)^{-1},$$

déjà obtenue ailleurs.[2]

4. Le cas Λ complexe

Utilisant les résultats de [9], qui étend la méthode de la phase stationnaire au cas d'une fonction phase à valeurs complexes, on peut étendre les résultats précédents au cas où le paramètre est complexe.

Modifiant quelque peu les notations, on pose pour $\Lambda', \Lambda'' \in \mathfrak{a}$,

$$J_{\Lambda',\Lambda''}(X) = \int_K e^{\langle \Lambda' + i\Lambda'', \operatorname{Ad} kX \rangle} \, dk.$$

On suppose toujours $\Lambda = \Lambda' + i\Lambda''$ régulier; grâce à la conjugaison par le groupe de Weyl, on peut toujours supposer que $\Lambda' \in \bar{\mathfrak{a}}^+$.

(4.1) Lemme. *Soit $\Lambda' \in \bar{\mathfrak{a}}^+$ et $X \in \mathfrak{a}^+$; alors, pour tout $k \in K$, $\langle \Lambda', X \rangle \geqslant \langle \Lambda', \operatorname{Ad} k \cdot X \rangle$, et l'égalité n'est atteinte que si k appartient au stabilisateur de Λ'.*

Supposons d'abord $\Lambda' \in \mathfrak{a}^+$; la fonction $k \mapsto \langle \Lambda', \operatorname{Ad} k \cdot X \rangle$ atteint son maximum en un point critique de cette fonction. D'après (2.2), cela implique $k \in W$; mais la hessienne en ce point doit être négative; d'après le calcul de la signature cela implique $k = \dot{e}$. D'où le lemme dans ce cas.

Si maintenant $\Lambda' \in \bar{\mathfrak{a}}^+$, alors l'inégalité large s'obtient par passage à la limite. Si maintenant k est tel que

$$\langle \Lambda', \operatorname{Ad} kX \rangle = \langle \Lambda', X \rangle,$$

il est clair que k est encore un point critique de cette fonction.

D'après la première partie de la démonstration de (2.2), cela implique que $\operatorname{Ad} k^{-1}\Lambda' \in \mathfrak{a}$, et donc qu'il existe un élément $w \in W$ tel que $w\Lambda' = \operatorname{Ad} k^{-1}\Lambda'$. Si $w\Lambda' \neq \Lambda'$, alors l'argument de [6] (corollaire 1 du

[2] Voir par exemple l'article de M. Flensted-Jensen, *J. Funct. Anal.* **30** (1978), 106–146.

lemme 35) s'applique, et par conséquent on a l'inégalité stricte. Par suite $w\Lambda' = \Lambda'$, autrement dit $\operatorname{Ad} k^{-1}\Lambda' = \Lambda'$. Ceci complète la démonstration du lemme.

On profite du lemme pour réécrire $J_{\Lambda',\Lambda''}$ sous la forme

$$\begin{aligned} J_{\Lambda',\Lambda''}(X) &= e^{\langle \Lambda', X\rangle} \int_K e^{-\langle \Lambda', X\rangle + \langle \Lambda' + i\Lambda'', \operatorname{Ad} kX\rangle}\, dk \\ &= \frac{1}{\operatorname{vol}(K/M)} e^{\langle \Lambda', X\rangle} \int_{K/M} e^{i(\langle \Lambda'' - i\Lambda', \operatorname{Ad} kX + i\langle \Lambda', X\rangle)}\, dk_M, \end{aligned}$$

et poser $\varphi(k) = \langle \Lambda'' - i\Lambda', \operatorname{Ad} kX\rangle + i\langle \Lambda', X\rangle$.

Comme $\Lambda'' - i\Lambda' = -i(\Lambda' + i\Lambda'')$ est régulier, les points critiques de φ sont encore les points $w \in W$ et sont non-dégénérés. De plus, d'après le lemme (4.1), $\operatorname{Im} \varphi \geqslant 0$, avec égalité pour $k \in W'$, où W' est la stabilisateur dans W de Λ'. Ce sont exactement les hypothèses nécessaires pour appliquer la méthode de [9].

Éliminons d'abord les contributions inessentielles.

Soit M_0' le stabilisateur de Λ' dans K, et soit χ une fonction C^∞, égale à 0 dans un voisinage U de M_0', et à un en dehors d'un voisinage V un peu plus grand. Alors d'après le lemme (4.1) $\langle \Lambda', \operatorname{Ad} kX\rangle < \langle \Lambda', X\rangle$ pour $k \notin U$, ce qui par compacité fournit un $\varepsilon > 0$, tel que

$$\langle \Lambda', \operatorname{Ad} kX\rangle - \langle \Lambda', X\rangle \leqslant -\varepsilon \|X\|,$$

pour $k \notin U$, et même uniformément pour X dans un compact de $\mathfrak{a}^+$. Il en résulte que

$$\left| \int_K e^{\langle \Lambda' + i\Lambda'', \operatorname{Ad} k \cdot tX\rangle}\, dk \right| \leqslant e^{\langle \Lambda', tX\rangle}\, e^{-\varepsilon t \|X\|},$$

pour tout $t \geqslant 0$, et ce terme va se révéler négligeable dans le développement asymptotique ultérieur.

Soit maintenant $k_0 \in M_0'/M$, mais distinct d'un élément $w \in W'$.

Soit ρ une fonction égale à un, au voisinage de k_0, et à support petit, et contenu dans le complémentaire de W'. On a clairement $d\varphi \neq 0$ sur le support de ρ. Le fait que l'intégrale correspondante

$$\int_{K/M} e^{it\varphi(k)} \rho(k)\, dk$$

soit négligeable résulte du lemme suivant.

(4.2) Lemme. *Soit V une variété différentiable, munie d'une mesure dv à densité C^∞; soit $\varphi\colon V \to \mathbb{C}$ une fonction C^∞, et $\rho\colon V \to \mathbb{C}$ une fonction C^∞ à* *support compact; on suppose que* $d\varphi \neq 0$ *sur le support de* ρ, *et que* $\operatorname{Im} \varphi \geqslant 0$ *sur le support de* ρ. *Alors l'intégrale*

$$I(t) = \int_K e^{it\varphi(v)} \rho(v)\, dv$$

est à décroissance rapide en t ($t \to +\infty$). *De plus, si* φ *et* ρ *dépendent continûment d'un paramètre, la décroissance rapide de* $I(t)$ *est localement uniforme par rapport au paramètre.*

Grâce à un argument de partition de l'unité, on peut toujours supposer que le support de ρ est contenu dans un ouvert arbitrairement petit. De plus si $\operatorname{Im} \varphi \geqslant \varepsilon > 0$ sur le suport de ρ, l'argument précédent s'applique. On peut donc supposer que $\operatorname{Im} \varphi$ s'annule en un point $x^0 \in V$; mais alors $\operatorname{Im} \varphi$ a un minimum local, et donc $d(\operatorname{Im} \varphi)(x^0) = 0$; comme $d\varphi(x^0) \neq 0$, on a donc $d(\operatorname{Re} \varphi)(x^0) \neq 0$. On peut donc (quitte à restreindre le support de ρ) choisir un système de coordonnées pour avoir, avec ψ réelle

$$\varphi(x) = \varphi(x^0) + x_1 + i\psi(x)$$

sur un voisinage de x^0.

Alors pour $t > 0$, on a

$$e^{it\varphi(x)} = \frac{1}{t} \frac{1}{i - (\partial\psi/\partial x_1)(x)} \frac{\partial}{\partial x_1} (e^{it\varphi(x)}),$$

et $i - (\partial\psi/\partial x_1)(x)$ ne s'annule pas au voisinage de x_0. Si Z est le champ de vecteur

$$\frac{1}{i - (\partial\psi/\partial x_1)(x)} \frac{\partial}{\partial x_1},$$

on a

$$I(t) = \int e^{it\varphi(x)}\, dx = \frac{1}{t^N} \int Z^N(e^{it\varphi(x)})\, \rho(x)\, dv$$

$$= \frac{1}{t^N} \int e^{it\varphi(x)} (Z^*)^N \rho(x)\, dv,$$

où Z^* est l'adjoint de Z relativement à la mesure dv.

On en déduit que $|I(t)| \leqslant C \cdot t^{-N}$, pour $t > 0$.

Un examen de la démonstration montre que cette estimation est localement uniforme par rapport au paramètre éventuel.

Un argument de partition de l'unité montre qu'il n'y a plus à considérer que les contributions à l'intégrale des voisinages des points $w_0 \in W'$.

Soit donc $w_0 \in W'$, et ρ une fonction C^∞ égale à un au voisinage de $w_0 \in M'/M$ et à support dans un petit voisinage de w_0. L'existence d'un développement asymptotique, lorsque t tend vers l'infini pour l'intégrale

$$\int_{K/M} e^{it\varphi(k)} \rho(k)\, dk$$

est alors conséquence des résultats de [9].

Nous contenterons de préciser le premier terme du développement. Pour cela, soit $q = d^2\varphi(w_0)$ la forme quadratique hessienne (à valeurs complexes) au point w_0. Il faut calculer avec les notations du paragraphe 3, $(\det(1/i)\, A)^{-1/2}$, où l'on choisit la détermination de la racine carrée qui est continûment déformée en 1 par l'homotopie

$$[0 \;\; 1] \ni s \mapsto \frac{1}{i}(1-s)\, A + sI.$$

Or dans la base $\{X_\alpha + \theta X_\alpha\}_{\alpha \in \Delta_+}$, cette matrice est diagonale, et vaut

$$\begin{pmatrix} \ddots & & \\ & (1-s)\dfrac{1}{i}(-\alpha(w_0^{-1}(\Lambda'' - i\Lambda))\,\alpha(X)) + s & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & (1-s)\,\alpha(w_0^{-1}\Lambda)\,\alpha(X) + s & \\ & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Notons, pour $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, par $z^{1/2}$ la détermination de la racine carré qui est réelle positive sur les réels positifs.

Alors comme

$$\operatorname{Re} \alpha(w_0^{-1}\Lambda) = \alpha(w_0^{-1}\Lambda') = \alpha(\Lambda') \geqslant 0,$$

on a clairement

$$\left(\text{dét}\, \frac{1}{i} A\right)^{-1/2} = \prod_{\alpha \in \Delta_+} \alpha(w_0^{-1}\Lambda)^{-1/2}\, \alpha(X)^{-1/2}.$$

Dans le cas particulier examiné au paragraphe 3, i.e., $\Lambda' = 0$, on a $\operatorname{Re} \alpha(\Lambda) = 0$, d'où

$$\begin{aligned} \alpha(iw_0^{-1}\Lambda'')^{-1/2} &= e^{-i\pi/4}\,|\alpha(w_0^{-1}\Lambda'')^{-1/2} \quad \text{si } \alpha(w_0^{-1}\Lambda'') > 0 \\ &= e^{i\pi/4}\,|\alpha(w_0^{-1}\Lambda'')|^{-1/2} \quad \text{si } \alpha(w_0^{-1}\Lambda'') < 0 \end{aligned}$$

de sorte que

$$\left(\det \frac{1}{i} A\right)^{-1/2} = e^{(i\pi/4)\gamma(w)} \left| \prod_{\alpha \in \Delta_+} \alpha(X)\, \alpha(w_0^{-1} A'') \right|^{-1/2}.$$

En général on obtient pour le premier terme du développement asymptotique le résultat suivant:

(4.3) THÉORÈME. *Soit $A = A' + iA''$ un élément régulier de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$; on suppose que $A' \in \bar{\mathfrak{a}}^+$; on note W' le stabilisateur dans W de A'. Alors, quand X tend vers l'infini dans $\mathfrak{a}^+$,*

$$J_{A',A''}(X) \sim \frac{(2\pi)^{n/2}}{\mathrm{vol}(K/M)} \sum_{w \in W'} e^{\langle A, wX \rangle} \prod_{\alpha \in \Delta_+} \alpha(X)^{-1/2}\, \alpha(w^{-1} A)^{-1/2},$$

où le signe $\sim$ signifie que la différence entre les deux expressions est un $O(\|X\|^{-n/2-1} e^{\langle A', X \rangle})$, uniformément pour X dans un cône à base compacte contenu dans $\mathfrak{a}^+$.

En particulier si A' est régulier, alors $W' = \{\mathrm{id}\}$, et dans ce cas

$$J_{A',A''}(X) \sim \frac{(2\pi)^{n/2}}{\mathrm{vol}(K/M)} \prod_{\alpha \in \Delta_+} \alpha(X)^{-1/2} \prod_{\alpha \in \Delta_+} \alpha(A)^{-1/2} e^{\langle A, X \rangle}.$$

Remarque finale. Par la même méthode, il est possible d'étudier le comportement à l'infini de $J_A(X)$, pour A régulier, lorsque X tend vers l'infini le long d'un rayon singulier. En effet, introduisons le stabilisateur M_0 de X dans K; alors on peut écrire

$$K_A(tX) = \int_{K/M_0} e^{it\langle A, \mathrm{Ad}\,\ddot{k}X \rangle}\, d\ddot{k}_{M_0},$$

et, par les mêmes raisonnements qu'aux paragraphes 2, 3 et 4 montrer que la fonction de phase $\ddot{k} \to \langle A, \mathrm{Ad}\,\ddot{k}X \rangle$ est une fonction de Morse sur K/M_0. Cela conduit à des développements asymptotiques analogues à ceux rencontrés, mais seules interviennent les racines qui ne s'annulent pas en X.

BIBLIOGRAPHIE

1. W. CASSELMAN, Systems of analytic partial differential equations of finite codimension, preprint.
2. J. L. CLERC, On the asymptotic behaviour of generalized Bessel functions, *Suppl. Rendiconti Circ. Math. Palermo* **1** (1981), 145–147.
3. J. J. DUISTERMAAT, "Fourier Integral Operators," Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, New York, 1973.

4. M. V. FEDORYUK, The stationary phase method and pseudo differential operators, *Russian Math. Surveys* **26** (1971), 65–115.
5. HARISH CHANDRA, Differential operators on a semi-simple Lie algebra, *Amer. J. Math.* (1957), 87–120.
6. HARISH CHANDRA, Spherical functions on a semi-simple Lie group, I, *Amer. J. Math.* **80** (1958), 241–310.
7. S. HELGASON, "Differential Geometry and Symmetric Spaces," Academic Press, New York, 1962.
8. S. HELGASON, A duality for symmetric spaces with applications to group representations. III. Tangent space analysis, *Adv. in Math.* **36** (1980), 297–323.
9. A. MELIN AND J. SJÖSTRAND, Fourier integral operators with complex valued phase functions, *in* "Lecture Notes in Mathematics Vol. 459," pp. 120–223, Springer-Verlag, Berlin/New York/Heidelberg.
10. G. WARNER, "Harmonic Analysis on Semi-simple Lie Groups, I, II," Springer-Verlag, Berlin, 1972.